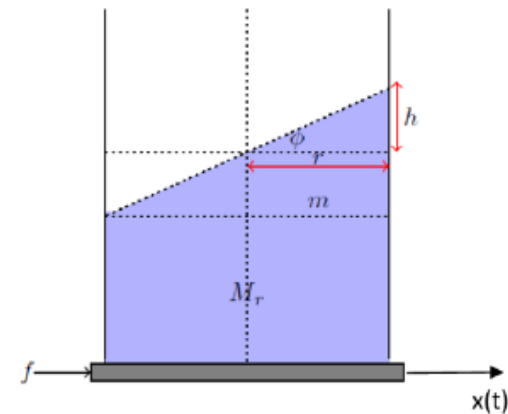


# **Simulazione dei Sistemi dinamici con Matlab-Simulink**

**Soluzione della prova finale del  
3/2/2021**

**Ing. Alessandro Pisano**  
**apisano@unica.it**

Un serbatoio cilindrico a sezione circolare contenente un liquido viene traslato sotto l'azione di una forza orizzontale  $f(t)$ . Il risultante moto oscillatorio del liquido (sloshing) contenuto nel serbatoio viene approssimato come in figura, e viene descritto dalla variabile  $h(t)$  (slosh height). Sia  $x(t)$  la coordinata orizzontale del serbatoio. Il comportamento dinamico del sistema è descritto dal seguente modello matematico

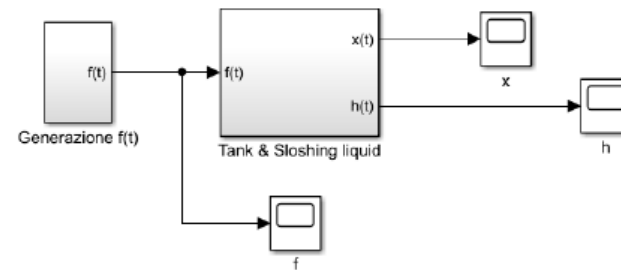
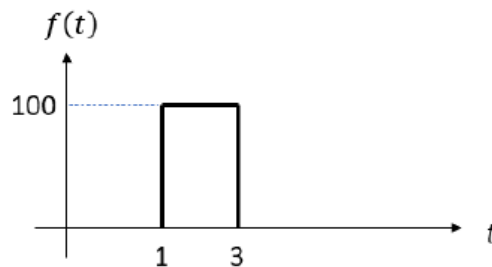


$$\begin{bmatrix} M_r & \frac{ml}{r} \cos\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right) \\ ml \cos\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right) & \frac{ml^2}{r} \frac{1}{1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl \sin\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\left[ \frac{2ml}{r^3} \frac{h(t) \cos\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right)}{\left[1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2\right]^2} + \frac{ml}{r^2} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right)}{\left[1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2\right]^2} \right] \\ \frac{c}{r \left[1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2\right]} - \frac{2ml^2}{r^3} \frac{h(t) \dot{h}(t)}{\left[1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2\right]^2} \end{bmatrix} \dot{h}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M_r$	Massa totale del liquido e del serbatoio [kg]	100
$m$	Massa del liquido soggetto ad oscillazione [kg]	20
$l$	Lunghezza del pendolo equivalente [m]	0.5
$r$	Raggio del serbatoio [m]	1.3
$c$	Coefficiente di smorzamento [ $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ]	3
$b$	Coefficiente di attrito [ $\text{N s m}^{-1}$ ]	20
$g$	Accelerazione di gravità [ $\text{m s}^{-2}$ ]	9.8

Per la forza orizzontale  $f(t)$  si consideri il profilo rappresentato nella seguente figura:



Si realizzi un modello Simulink del sistema con due sottosistemi distinti come mostrato in figura, e si simuli il comportamento dinamico del sistema per 40 secondi a partire dalle condizioni iniziali  $x(0) = 1, h(0) = \dot{h}(0) = \dot{x}(0) = 0$  utilizzando un metodo di integrazione a passo fisso con step-size pari a 0.01 secondi. Realizzare uno script che avvii in automatico il modello Simulink e crei un grafico della posizione  $x(t)$  del serbatoio. Scrivere quindi una function che acquisisca in ingresso la variabile  $h(t)$  e restituisca all'esterno il valore massimo  $\phi_{max}$  assunto dall'angolo  $\phi(t) = \text{atan}(h(t)/r)$  ed il relativo istante  $T_{max}$ . La function deve anche creare al suo interno un grafico dell'angolo  $\phi(t)$ . Tutti i grafici dovranno essere corredati da opportune etichette esplicative.

Data la forma del modello matematico, che rende oltremodo complicato ricavare il modello in forma esplicita, risulta imprescindibile impiegare l'approccio vettoriale.

Definiamo:

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$$

e riscriviamo il modello in forma vettoriale compatta

$$A(q)\ddot{q}(t) + H(q(t), \dot{q}(t)) = F(t)$$

con:

$$A(q) = \begin{bmatrix} M_r & \frac{ml}{r} \cos\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right) \\ ml \cos\left(\arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right)\right) & \frac{\frac{ml^2}{r}}{1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2} \end{bmatrix}$$

$$A(q)\ddot{q}(t) + H(q(t), \dot{q}(t)) = F(t)$$

$$H(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl \sin \left( \arctan \left( \frac{h(t)}{r} \right) \right) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{2ml}{r^3} \frac{h(t) \cos \left( \arctan \left( \frac{h(t)}{r} \right) \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{h(t)}{r} \right)^2 \right]^2} - \frac{ml}{r^2} \frac{\sin \left( \arctan \left( \frac{h(t)}{r} \right) \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{h(t)}{r} \right)^2 \right]^2} \\ \frac{c}{r \left[ 1 + \left( \frac{h(t)}{r} \right)^2 \right]} - \frac{2ml^2}{r^3} \frac{h(t) \dot{h}(t)}{\left[ 1 + \left( \frac{h(t)}{r} \right)^2 \right]^2} \end{bmatrix} \dot{h}(t)$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avendo rappresentato il modello in forma vettoriale risulta immediato ricavarne la forma esplicita:

$$\ddot{q}(t) = A^{-1}(q) [F(t) - H(q(t), \dot{q}(t))]$$

che useremo nella costruzione del modello Simulink.

Rappresentiamo in forma piu semplice il vettore colonna  $H(q(t), \dot{q}(t))$  e la matrice  $A(q)$ . Definendo le quantità:

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{h(t)}{r}\right) \qquad p(t) = 1 + \left(\frac{h(t)}{r}\right)^2$$

si può scrivere:

$$H(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl \sin(\phi(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2ml}{r^3} \frac{h(t)\cos(\phi(t))}{[p(t)]^2} - \frac{ml}{r^2} \frac{\sin(\phi(t))}{[p(t)]^2} \\ \frac{c}{r p(t)} - \frac{2ml^2}{r^3} \frac{h(t)\dot{h}(t)}{[p(t)]^2} \end{bmatrix} \dot{h}(t)$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} M_r & \frac{ml \cos(\phi(t))}{r p(t)} \\ ml \cos(\phi(t)) & \frac{ml^2}{r p(t)} \end{bmatrix}$$

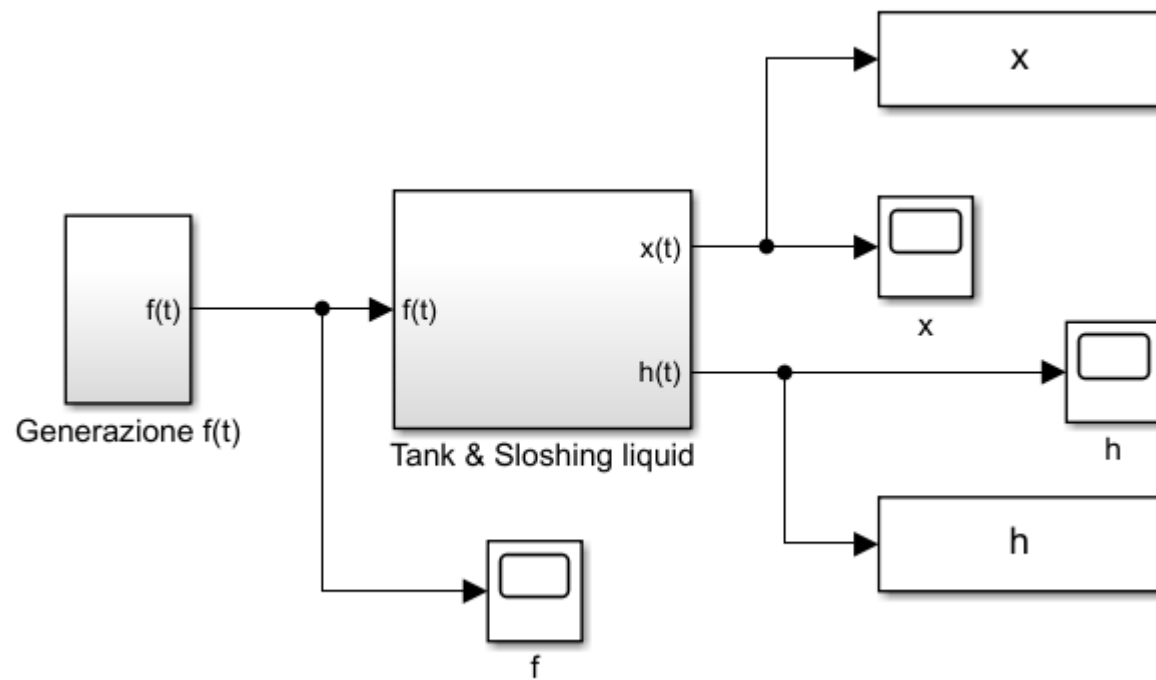
Questo termine lo  
chiameremo «**B**» all'interno  
del blocco Matlab Function

Presentiamo due possibili soluzioni

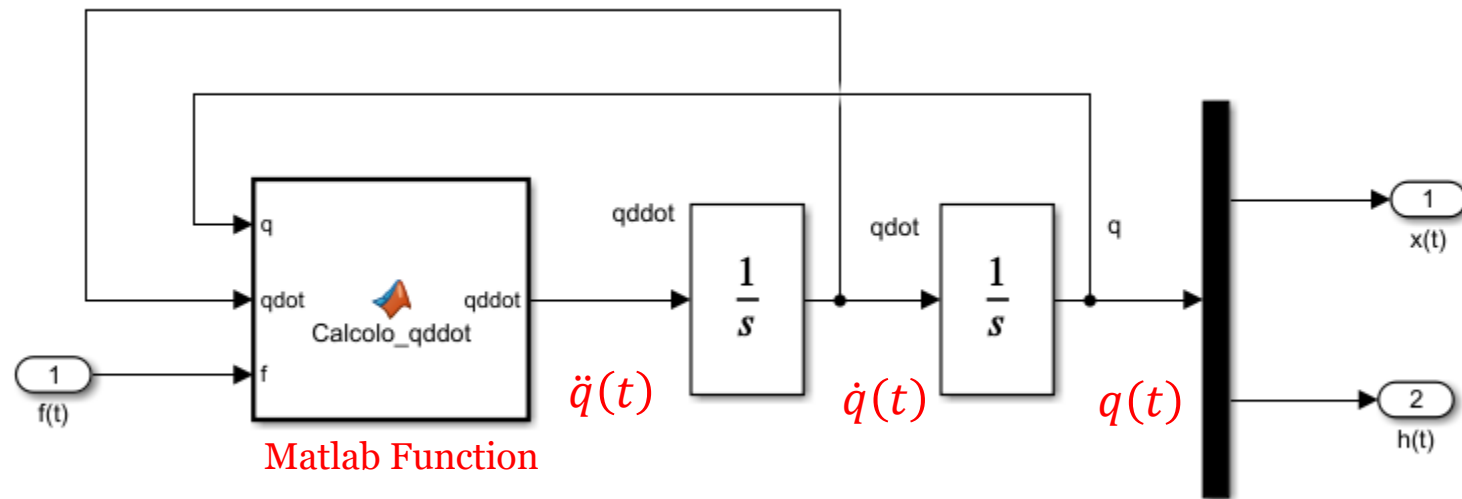
## **Soluzione 1**

Files: `slosh_model01.slx`  
`slosh_script01.m`

## Modello Simulink



## Contenuto del Subsystem «Tank & Sloshing Liquid»



$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix}$$

Mediante un blocco Matlab Function viene generato il vettore  $\ddot{q}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix}$

```
function qddot = Calcolo_qddot(q,qdot,f)
```

```
M=100; m=20;
l=0.5; r=1.3;
c=3;    b=20;
g=9.8;
```

```
x=q(1); h=q(2);
```

```
xdot=qdot(1);
hdot=qdot(2);
```

```
fi=atan(h/r);
p=(1+(h/r)^2);
```

```
sfi=sin(fi); cfi=cos(fi);
```

```
A=[M          m*l*cfi/(r*p);
   m*l*cfi    m*l^2/(r*p)];
```

```
F=[f;0];
```

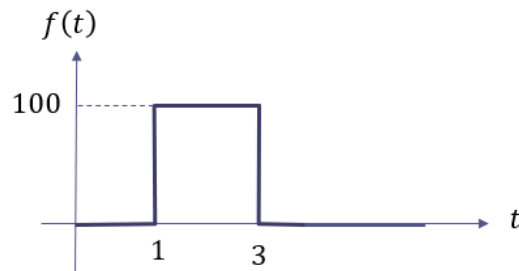
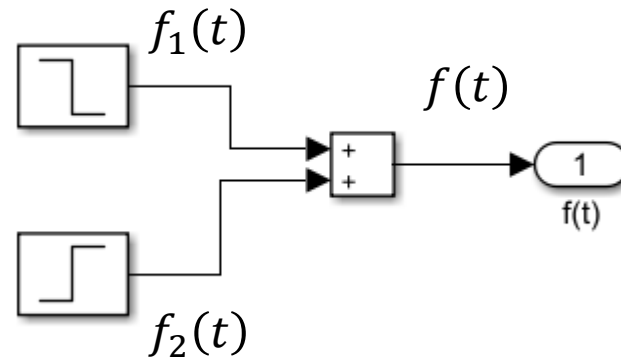
```
B=[ -2*m*l*h*cfi/(r^3*p^2)-m*l*sfi/(r^2*p^2);
    c/(r*p)-2*m*l^2*h*hdot/(r^3*p^2)]*hdot;
```

```
H=[b;0]*xdot+[0;m*g*l*sfi]+B;
```

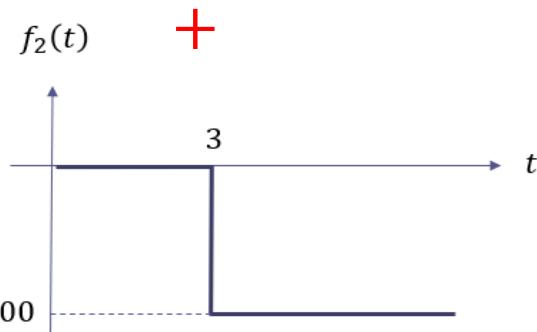
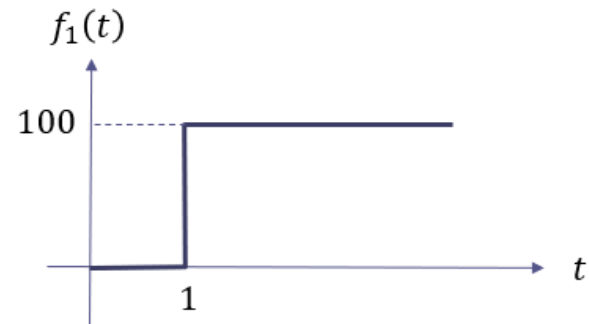
```
qddot = inv(A)*(F-H);
```

# Corpo della Matlab Function del modello Simulink

## Contenuto del Subsystem «Generazione $f(t)$ »



=



## Prima parte dello script

```
%% parametrizzazione e run del modello
```

```
q0=[1;0]
```

```
qdot0=[0;0]
```

Definizione condizioni iniziali

```
sim('slosh_model01')
```

Run del modello

```
%% grafico della posizione x(t)
```

```
figure
```

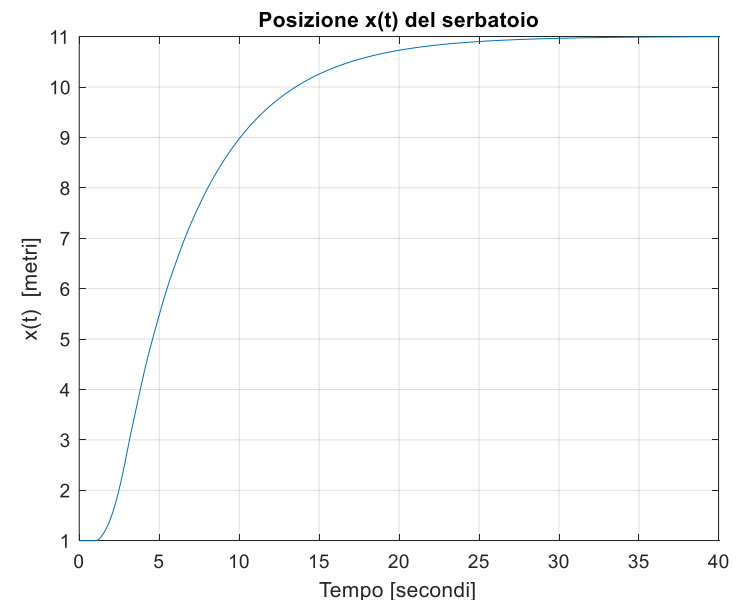
```
plot(x),grid
```

```
xlabel('Tempo [secondi]')
```

```
ylabel('x(t) [metri]')
```

```
title('Posizione x(t) del serbatoio')
```

Grafico di  $x(t)$



## Corpo della function

```
function [fimax Tmax]=calcolofimaxTmax(h)

r=1.3;
fi=atan(h.data/r);

figure
plot(h.time,fi),grid
title('fi(t)')
xlabel('Tempo [secondi]')
ylabel('\phi(t) [rad]')
title('Angolo \phi(t) del liquido oscillante')

[fimax maxpos]=max(fi);
Tmax=h.time(maxpos);

end
```

v. esempio 5 della dispensa «O4-Istruzioni di controllo» (slide 9) per un esempio analogo di determinazione del valore massimo e dell'istante di massimo di una funzione.

Il corpo della function può essere indifferentemente inserito al termine dello Script, o in un file .m a parte

## Utilizzo della function all'interno dello Script

```
[fimax Tmax]=calcolofimaxTmax(h)
```

```
fimax =  
  
    0.1457  
  
Tmax =  
  
    3.6000
```

Output nella command window

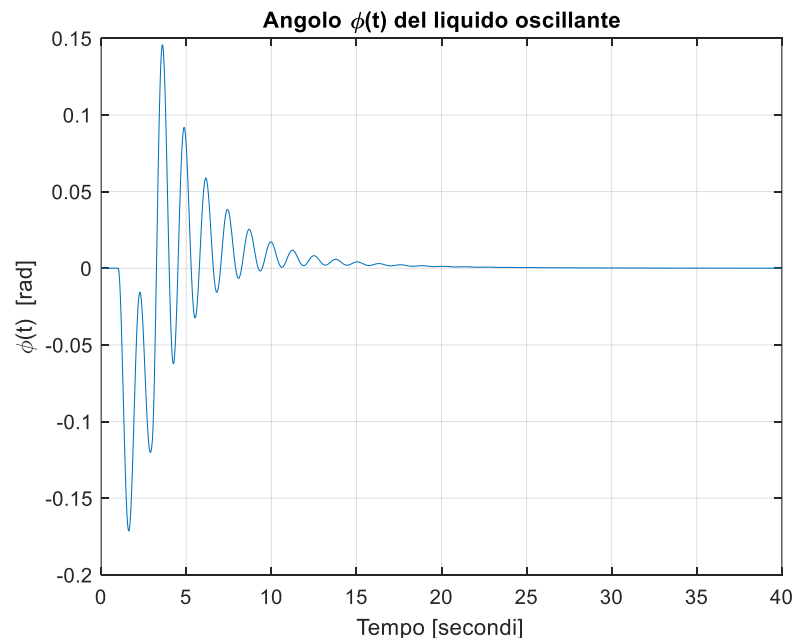


Grafico  
dell'angolo  $\phi(t)$ .  
Si noti come il  
valore massimo e  
l'istante di  
massimo  
coincidano con  
quanto calcolato

```

%% parametrizzazione e run del modello
q0=[1;0]
qdot0=[0;0]

sim('slosh_model01')

%% grafico della posizione x(t)
figure
plot(x),grid
xlabel('Tempo [secondi]')
ylabel('x(t) [metri]')
title('Posizione x(t) del serbatoio')

%% definizione e impiego della function

[fimax Tmax]=calcolofimaxTmax(h)

function [fimax Tmax]=calcolofimaxTmax(h)

r=1.3;
fi=atan(h.data/r);

figure
plot(h.time,fi),grid
title('fi(t)')
xlabel('Tempo [secondi]')
ylabel('\phi(t) [rad]')
title('Angolo \phi(t) del liquido oscillante')

[fimax maxpos]=max(fi);
Tmax=h.time(maxpos);

end

```

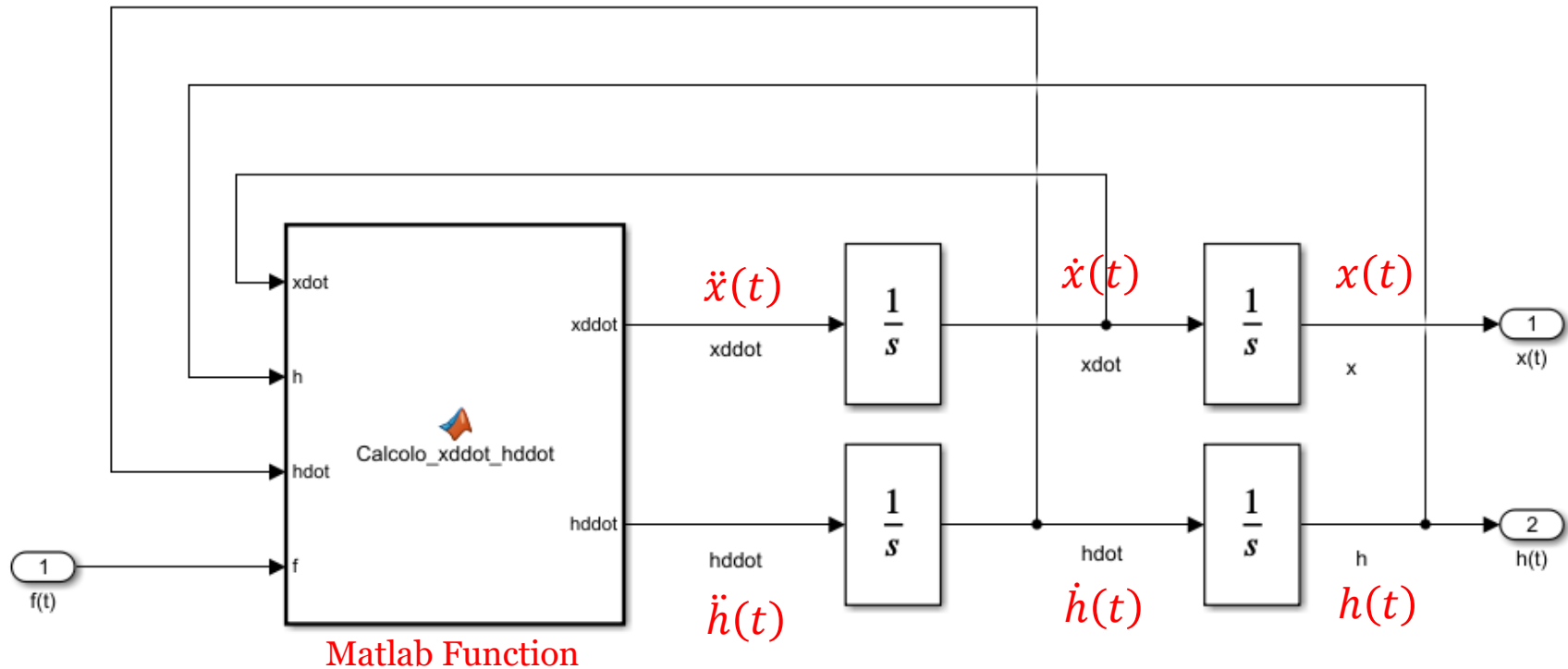
## Script complessivo

## Soluzione 2

Files: slosh\_model02.slx  
slosh\_script02.m

La differenza rispetto alla soluzione 1 sta unicamente nel contenuto del Subsystem «**Tank & Sloshing Liquid**»

## Contenuto del Subsystem «Tank & Sloshing Liquid»



Ora il blocco Matlab Function genera separatamente i segnali scalari  $\ddot{x}(t)$  e  $\ddot{h}(t)$  anziché il vettore  $\ddot{q}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix}$

```
function [xddot,hddot] = Calcolo_xddot_hddot(xdot,h,hdot,f)
```

```
M=100; m=20;
l=0.5; r=1.3;
c=3;    b=20;
g=9.8;
```

```
fi=atan(h/r);
p=(1+(h/r)^2);
```

```
sfi=sin(fi); cfi=cos(fi);
```

```
A=[M          m*l*cfi/(r*p);
   m*l*cfi    m*l^2/(r*p)];
```

```
F=[f;0];
```

```
B=[-2*m*l*h*cfi/(r^3*p^2)-m*l*sfi/(r^2*p^2);
    c/(r*p)-2*m*l^2*h*hdot/(r^3*p^2)]*hdot;
```

```
H=[b;0]*xdot+[0;m*g*l*sfi]+B;
```

```
qddot = inv(A)*(F-H);
```

```
xddot=qddot(1);
```

```
hddot=qddot(2);
```

**Corpo della Matlab  
Function del modello  
Simulink (in rosso le  
differenze rispetto alla  
soluzione 1)**

## Prima parte dello Script (in rosso le differenze rispetto alla soluzione 1)

```
%% parametrizzazione e run del modello  
x0=1;  
xdot0=0;  
h0=0;  
hdot0=0;  
  
sim('slosh_model02')
```

La prosecuzione dello script è identica alla soluzione 1.